Chapitre 1

Espaces euclidiens

On va généraliser ici la notion d'orthogonalité connue pour les vecteurs du plan ou de l'espace.

1.1 Formes bilinéaires

Dans ce paragraphe, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle* **forme bilinéaire** *sur E toute application $f\colon E \times E \to \mathbb{K}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *Pour tout $a \in E$, l'application $E \to \mathbb{K}$, $y \to f(a, y)$ est linéaire, i.e.,*

$$\forall\,(u, v) \in E \times E,\ \forall\,\lambda \in \mathbb{K}, \quad f(a, u + \lambda v) = f(a, u) + \lambda f(a, v).$$

(ii) *Pour tout $b \in E$, l'application $E \to \mathbb{K}$, $x \to f(x, b)$ est linéaire. i.e.,*

$$\forall\,(x, y) \in E \times E,\ \forall\,\alpha \in \mathbb{K}, \quad f(x + \alpha y, b) = f(x, b) + \alpha f(v, b).$$

Autrement dit, pour tous $a \in E$ et $b \in E$, les applications $y \mapsto f(a, y)$ et $x \mapsto f(x, b)$ sont des formes linéaires, d'où le terme « forme ».

Soit f une application de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$. Compte tenu des définitions, dire que f est bilinéaire signifie que pour tous $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et tous $x, y, u, v \in E$,

$$f(\alpha x + \beta y, \lambda u + \mu v) = \alpha\lambda f(x, u) + \alpha\mu f(x, v) + \beta\lambda f(y, u) + \beta\mu f(y, v)$$

Exemples.

1) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. L'application

$$f\colon E \times E \to \mathbb{R}\ ,\ (u, v) \to \int_0^1 u(t)v(t)\,dt$$

est une forme bilinéaire sur E.

2) Supposons $E = \mathbb{K}^n$, et soit $p \in \{1, \ldots, n\}$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sont des vecteurs de E, posons :

$$f(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_p y_p.$$

On obtient ainsi une forme bilinéaire sur E.
3) On suppose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(E), \quad f(A, B) = \mathrm{Tr}(AB).$$

Alors f est une forme bilinéaire sur E.

♦ **Exercice 1.** Vérifier dans chacun des exemples ci-dessus que f est en effet une forme bilinéaire.

1.1.2 Interprétation matricielle

Supposons que E soit de dimension finie $n > 0$. Soient $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et f une forme bilinéaire sur E. Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, posons $a_{ij} = f(e_i, e_j)$, et soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & \cdots & f(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f(e_n, e_1) & \cdots & f(e_n, e_n) \end{pmatrix}.$$

On dit que A est la ***matrice de f dans la base*** $\mathcal{E}$, et on écrit $A = \mathrm{Mat}(f; \mathcal{E})$.

⚠ **Attention** : on écrit $\mathrm{Mat}(f; \mathcal{E})$ bien que f ne soit pas une application linéaire. Il s'agit seulement d'une notation.

Soient $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ et $y = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$ des vecteurs de E. Notons X et Y les matrices de x et y dans la base $\mathcal{E}$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Compte tenu de la définition 1.1.1, il vient :

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i y_j = {}^t\!XAY.$$

Définition 1.1.2. *La forme f est dite* **symétrique** *si l'on a $f(x, y) = f(y, x)$ pour tous $x, y \in E$. D'après ce qui précède, f est symétrique si et seulement si la matrice A est* **symétrique**, *i.e., $A = {}^t\!A$.*

♦ **Exercice 2.** Vérifier les assertions précédentes.

1.2 Produit scalaire

On suppose désormais que $\underline{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$.

Définition 1.2.1. *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f une forme bilinéaire.*

(i) *On dit que f est* **positive** *(resp.* **négative***) si $f(x, x) \geqslant 0$ (resp. $f(x, x) \leqslant 0$) pour tout $x \in E$.*

(ii) *On dit que f est* **définie positive** *(resp.* **définie négative***) si elle est positive (resp. négative) et si $f(x,x) = 0$ si et seulement si x est nul.*

♦ **Exercice 3.** Reprendre les exemples de l'exercice 1 avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Quels sont ceux pour lesquels f est positive ? définie positive ?

Définition 1.2.2. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle* **produit scalaire (euclidien)** *sur E toute forme bilinéaire sur E qui est symétrique et définie positive. Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé un* **espace (vectoriel) euclidien***.*

Euclide *(en grec ancien Εὐκλείδης / Eukleidês), né vers -325, mort vers -265 à Alexandrie, est un mathématicien de la Grèce antique, auteur des « Éléments », qui sont considérés comme l'un des textes fondateurs des mathématiques.*

♦ **Exercice 4.** Reprendre les exemples de l'exercices 1 avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Quels sont ceux pour lesquels f est un produit scalaire ?

Remarque. Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie possède toujours au moins un produit scalaire mais il en a en général plusieurs !

Exemple fondamental. Dans $\mathbb{R}^n$, l'exemple 2) de l'exercices 1 avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ appelé le ***produit scalaire canonique***. Cet exemple sera crucial dans le cours et nous commencerons bon nombre d'exercices par : « On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique… » ou « Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique… », etc.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ a d'autres produits scalaires : considérons une base quelconque $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et posons, pour $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ et $y = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$,

$$f(x,y) = \lambda_1\mu_1 + \cdots + \lambda_n\mu_n.$$

On vérifie que f est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, en général différent du produit scalaire canonique.

1.3 Premières propriétés

Désormais, E désigne un espace vectoriel euclidien ; en particulier, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Si $x, y \in E$, on note $(x \,|\, y)$ le produit scalaire de x et y. L'application

$$E \times E \to \mathbb{R} \ , \ (x,y) \to (x \,|\, y)$$

est donc une forme bilinéaire symétrique et définie positive sur E. On a $(x \,|\, x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$. On peut donc considérer :

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$

Proposition 1.3.1. *Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :*

(i) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$;
(ii) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \,|\, y) + \|y\|^2$;
(iii) $|(x \,|\, y)| \leqslant \|x\|.\|y\|$ *(inégalité de Cauchy-Schwarz)* ;
(iv) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire)* ;
(v) $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\|$;
(vi) $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$ *(identité de la médiane).*

Augustin Louis, baron Cauchy, *né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux (Hauts-de-Seine) le 23 mai 1857, est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique.*

Hermann Amandus Schwarz, *né le 25 janvier 1843 à Hermsdorf, en Silésie (aujourd'hui la ville de Jerzmanowa en Pologne) et mort le 30 novembre 1921 à Berlin est un mathématicien allemand. Ses travaux sont marqués par une forte interaction entre l'analyse et la géométrie.*

♦ **Exercice 5.** * Démontrer cette proposition.

Théorème 1.3.2. *L'application $x \to \|x\|$ vérifie pour tout scalaire λ et tous vecteurs x, y de E les propriétés suivantes :*

(i) $\|x\| \geqslant 0$ *(positivité) ;*

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *(homogénéité) ;*

(iii) $\|x\| = 0$ *si et seulement* $x = 0$ *(caractère « définie ») ;*

(iv) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

On dit que l'application $x \to \|x\|$ est une **norme** *sur E.*

Remarques. 1) On dit que $x \in E$ est ***unitaire*** si $\|x\| = 1$.

2) Il existe des normes sur E qui ne sont pas issues d'un produit scalaire mais cela dépasse un peu le programme…

♦ **Exercice 6.** Démontrer ce théorème.

Définition 1.3.3. *Soit E un espace euclidien.*

(i) *On dit que des vecteurs x, y de E sont* **orthogonaux** *si $(x \,|\, y) = 0$ (ce qui équivaut à $(y \,|\, x) = 0$).*

(ii) *Deux parties non vides A, B de E sont dites* **orthogonales** *si, pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$, x et y sont orthogonaux.*

Proposition 1.3.4. *Soit A une partie non vide de E. L'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A est un sous-espace vectoriel de E, noté $A^\perp$, et appelé l'***orthogonal** *de A (dans E).*

♦ **Exercice 7.** 1) Démontrer cette proposition.

2) Quel est l'orthogonal de E dans E ? l'orthogonal de $\{0_E\}$ dans E ?

Exercice 1. Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall\, (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(A, B) = \mathrm{Tr}\,({}^t\!AB).$$

1) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Ant}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices diagonales (resp. symétriques, antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})^\perp$, $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})^\perp$ et $\mathrm{Ant}_n(\mathbb{R})^\perp$.

Définition 1.3.5. *Soit $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E.*

(i) *On dit que $\mathcal{X}$ est* **orthogonale** *si $(x_i \,|\, x_j) = 0$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, p\}$ tels que $i \neq j$.*

(ii) *On dit que $\mathcal{X}$ est* **orthonormée** *ou* **orthonormale** *si elle est orthogonale et si tous les vecteurs x_i sont unitaires (i.e., $\forall\, i \in \{1, \dots, p\}$, $\|x_i\| = 1$).*

Théorème 1.3.6 (Théorème de Pythagore)**.** *Soit $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E.*

(i) *On suppose que la famille $\mathcal{X}$ est orthogonale. On a :*

$$\Big\| \sum_{k=1}^{p} x_k \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \|x_k\|^2.$$

(ii) *Si la famille $\mathcal{X}$ est orthogonale et si $x_k \neq 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, alors $\mathcal{X}$ est libre. En particulier, si $\mathcal{X}$ est orthonormée, alors $\mathcal{X}$ est libre.*

Pythagore *(en grec ancien Πυθαγόρας / Pythagóras) est un philosophe, mathématicien et scientifique présocratique qui serait né aux environs de 580 av. J.-C. à Samos, une île de la mer Égée au Sud-Est de la ville d'Athènes ; on établit sa mort vers 495 av. J.-C., à l'âge de 85 ans.*

♦ **Exercice 8.** Démontrer ce théorème.

1.4 Bases orthonormées

1.4.1 Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt et ses conséquences

Jørgen Pedersen Gram *est un mathématicien danois né le 27 juin 1850 à Nustrup (près de Haderslev) et mort le 29 avril 1916 à Copenhague.*

Erhard Schmidt *(13 janvier 1876 - 6 décembre 1959) était un mathématicien allemand né à Dorpat, en Allemagne (aujourd'hui Tartu, en Estonie).*

Théorème 1.4.1 (procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt)**.** *Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension finie $n > 0$ et $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Il existe une base $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ de E possédant les propriétés suivantes :*

(i) *$\mathcal{F}$ est une famille orthonormée, i.e., $(f_i \,|\, f_j) =$ pour tout $i \neq j$ et $\|f_i\| = 1$ pour tout i ;*

(ii) *Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on a $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_j) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$.*

De plus, on construit les vecteurs $f_1, \ldots, f_n$ par récurrence, selon un procédé appelé le **procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt***, comme suit :*

1) *On pose*

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}.$$

2) *On suppose avoir construit une famille orthonormée $(f_1, \ldots, f_j)$ pour un certain $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ telle que $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ pour tout $k \leqslant j$. On définit alors f_{j+1} par :*

$$f_{j+1} = \frac{e_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} (e_{j+1} \,|\, f_k) f_k}{\|e_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} (e_{j+1} \,|\, f_k) f_k\|}.$$

♦ **Exercice 9.** Démontrer ce théorème et illustrer la construction par une figure.

Exercice 2. 1) Soit $E = \mathbb{R}^3$. Déterminer, grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, une base orthonormée de $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ où $\varepsilon_1 = (1, -1, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 2, 1)$.

2) Soit $E = \mathbb{R}^4$. Déterminer, grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, une base orthonormée de $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 1, 0), \quad \varepsilon_2 = (-1, 1, 2, 0), \quad \varepsilon_3 = (-2, 0, 0, 0).$$

Le résultat suivant est évident d'après le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt mais repose sur l'existence (non triviale) de bases dans un espace vectoriel de dimension finie :

Corollaire 1.4.1. *Si E est un espace euclidien non réduit à $\{0_E\}$, il possède des bases orthonormées.*

Ce corollaire est crucial. Grâce à lui, il sera désormais légitime de commencer un énoncé par « Soient E un espace euclidien et $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E... » ce que nous ferons très souvent.

⚠ **Attention** : Comme pour les espaces vectoriels de dimension finie, un espace vectoriel euclidien n'a pas une unique base orthonormée. La phrase « Soit $\mathcal{E}$ la base orthonormée de E… » n'a donc aucun sens !

Exemple fondamental. Dans $\mathbb{R}^n$, la base canonique

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

est orthonormée pour le produit scalaire canonique.

♦ **Exercice 10.** Vérifier cette assertion et donner d'autres exemples de bases orthonormées dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

Supposons E de dimension finie $n > 0$, et soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soient $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ et $y = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$ des vecteurs de E. Notons X et Y les matrices de x et y dans la base $\mathcal{E}$. On a alors :

$$(x \,|\, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \mu_j (e_i | e_j).$$

La base $\mathcal{E}$ étant orthonormée, il vient donc :

$$(x \,|\, y) = \lambda_1 \mu_1 + \cdots + \lambda_n \mu_n = {}^t X Y = {}^t Y X.$$

Théorème 1.4.2. *Soit E un espace euclidien de dimension finie non nulle n.*

(i) *Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$, avec $1 \leqslant p < n$, une famille orthonormée de vecteurs de E. Il existe $e_{p+1}, \dots, e_n \in E$ tels que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base orthonormée de E.*

(ii) *Soit F un sous-espace vectoriel de E. On a :*

$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

En particulier :

$$\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F.$$

Remarque. l'assertion (i) est parfois appelée le « théorème de la base orthonormée incomplète ».

♦ **Exercice 11.** Démontrer ce théorème à l'aide du théorème de la base inccomplète « classique ».

Exercice 3. Soient E un espace euclidien et F et G deux sous-espaces de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $F^\perp$ et $G^\perp$ sont orthogonaux ;
(ii) $F^\perp \subseteq G$;
(iii) $G^\perp \subseteq F$.

1.4.2 Projections orthogonales

Soit F un sous-espace de E. On a $E = F \oplus F^\perp$. On peut donc considérer la projection de E sur F parallèlement à $F^\perp$. On dit que c'est la ***projection orthogonale*** de E sur F.

♦ **Exercice 12.** Réinterpréter le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt en terme de projections orthogonales.

Exercice 4. * Soient E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et $a \in E$.
1) Établir, pour tous $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|a - x + \lambda y\|^2 = \|a - x\|^2 + 2\lambda(a - x \,|\, y) + \lambda^2\|y\|^2.$$

2) En déduire que, pour $x \in F$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $||a - x|| = \inf\{||a - z|| \,;\, z \in F\}$;
(ii) $(a - x) \in F^\perp$.

3) Prouver qu'il existe un unique point x de F vérifiant les conditions de la question 2), et que c'est l'image de a par la projection orthogonale de E sur F.

Exercice 5. Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad (x \,|\, f(x)) = 0.$$

Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des supplémentaires orthogonaux dans E, i.e., $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E$ et $(\ker f)^\perp = \operatorname{Im} f$.

1.5 Adjoint d'un endomorphisme

Dans tout ce paragraphe, E est un espace vectoriel euclidien de dimension finie $n > 0$.

Théorème 1.5.1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un et un seul endomorphisme de E, noté u^*, et appelé l'*adjoint *de u, tel que pour tous $x, y \in E$,*

$$(u(x) \,|\, y) = (x \,|\, u^*(y))$$

Si $\mathcal{E}$ est une base orthonormée *de E, on a :*

$$\operatorname{Mat}(u^*; \mathcal{E}) = {}^t\operatorname{Mat}(u; \mathcal{E}).$$

⚠ **Attention** : La matrice de u^* dans la base $\mathcal{E}$ est la transposée de la matrice de u dans cette même base si $\mathcal{E}$ est une base orthonormée.

♦ **Exercice 13.** Démontrer ce théorème.

Proposition 1.5.1. *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :*

(i) $(\lambda u + \mu v)^* = \lambda u^* + \mu v^*$.

(ii) $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

(iii) $(u^*)^* = u$.

(iv) *On a* $(\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E$ *et, si* $u \in GL(E)$, *alors* $u^* \in GL(E)$ *et* $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

◆ **Exercice 14.** Démontrer la proposition.

Exercice 6. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u, i.e., $u(F) \subset F$. Montrer que $F^\perp$ est stable par u^*, i.e., $u^*(F^\perp) \subset F^\perp$. Interpréter matriciellement ce résultat.

Exercice 7. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection de E.

1) Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in E$.

2) Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si $p = p^*$.

1.6 Endomorphismes orthogonaux et matrices orthogonales

Définition-Proposition 1.6.1. *Soient E un espace euclidien de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est un* **endomorphisme orthogonal** *si l'une des deux conditions suivantes équivalentes est vérifiée :*

(i) $\forall\, x, y \in E,\ (u(x) \,|\, u(y)) = (x \,|\, y)$;

(ii) $\forall\, x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.

Définition 1.6.2. *Une matrice $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite* **orthogonale** *si*

$$\Omega^t\Omega = {}^t\Omega\,\Omega = I_n.$$

En particulier, si Ω est orthogonale alors Ω est inversible et $\Omega^{-1} = {}^t\Omega$.

Le théorème suivant justifie l'appellation « orthogonale » de la définition précédente :

Théorème 1.6.1. *Soient E un espace euclidien de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est un endomorphisme orthogonal ;*

(ii) *$u \in GL(E)$ et $u^* = u^{-1}$;*

(iii) *il existe une base orthonormée $\mathcal{E}$ de E telle que* $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}) \in O(n)$;

(iv) *pour toute base orthonormée $\mathcal{E}$ de E, on a* $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}) \in O(n)$;

(v) *il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ soit une base orthonormée de E ;*

(vi) *pour toute base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.*

⚠ **Attention** : là encore, la matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une base $\mathcal{E}$ est orthogonale si $\mathcal{E}$ est une base orthonormée.

◆ **Exercice 15.** Démontrer ce théorème.

◆ **Exercice 16.** 1) Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n est un sous-groupe du groupe $GL_n(\mathbb{R})$. On le note $O(n)$, et on dit que c'est le ***groupe orthogonal de degré*** n.

Si $\Omega \in O(n)$, de $\Omega^t\Omega = I_n$, on déduit $(\det \Omega)^2 = 1$, donc $\det \Omega = \pm 1$. On pose :

$$SO(n) = \{\Omega \in O(n) \mid \det \Omega = 1\}, \quad O^-(n) = \{\Omega \in O(n) \mid \det \Omega = -1\}.$$

2) Montrer que l'ensemble $SO(n)$ est un sous-groupe de $O(n)$, appelé le ***groupe spécial orthogonal de degré*** n. Qu'en est-il de l'ensemble $O^-(n)$?

Il sera parfois très utile (voir par exemple l'exercice 16) d'avoir à l'esprit le résultat suivant :

Corollaire 1.6.3. *Soit $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a l'équivalence : Ω est une matrice orthogonale si et seulement si Ω est la matrice de passage d'une base orthonormée $\mathcal{E}$ de E à une base orthonormée $\mathcal{F}$ de E.*

♦ **Exercice 17.** On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

1) Montrer que $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$. On dit que c'est le ***groupe orthogonal*** de E.
On rappelle que le *déterminant* d'un endomorphisme f de E est le déterminant de sa matrice dans n'importe quelle base de E (cette définition ne dépend pas du choix de la base : voir le cours de première année).

2) Montrer que si $u \in O(E)$, on a $\det u = \pm 1$.

On pose :

$$SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det u = 1\}, \quad O^-(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \det u = -1\}.$$

3) Vérifier que $SO(E)$ est un sous-groupe de $O(E)$. Qu'en est-il de l'ensemble $O^-(E)$?

On dit que $SO(E)$ est le ***groupe spécial orthogonal*** de E. Un élément de $SO(E)$ est appelé une ***rotation*** de E. Cette appellation sera justifiée dans le cas où $n = 2$ et $n = 3$ au chapitre suivant.

⚠ **Attention** : le fait que $\det u = \pm 1$ n'implique pas que u soit un endomorphisme orthogonal de E. Par exemple, $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ mais $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin O(2)$ (à vérifier).

Exercice 8. Soit u un endomorphisme orthogonal de E.
1) Soit F un sous-espace de E stable par u. Montrer que $F^\perp$ est stable par u.
2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de u. Montrer : $\lambda = \pm 1$.
3) Si $\varepsilon = \pm 1$, montrer que les sous-espaces $\ker(u - \pm \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}\,(u - \pm \mathrm{Id}_E)$ sont orthogonaux et supplémentaires dans E.

1.7 Endomorphismes symétriques

Théorème-Définition 1.7.1. *Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $u = u^*$;

(ii) *il existe une base orthonormée $\mathcal{E}$ de E telle que* $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E})$ *soit symétrique ;*

(iii) *pour toute base orthonormée $\mathcal{E}$ de E,* $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E})$ *est symétrique.*

Si ces conditions sont réalisées, on dit que u est un endomorphisme **symétrique** *ou* **auto-adjoint** *de E.*

Exemples. 1) L'identité, l'endomorphisme nul et les homothéties vectorielles sont des endomorphismes symétriques de E.
2) Les projecteurs orthogonaux sont des endomorphismes symétriques (cf. exercice 20).

♦ **Exercice 18.** Démontrer ce théorème.

Dans la suite, on note $\mathrm{Sym}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E ; c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. On désigne par $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices d'ordre n qui sont symétriques.

⚠ **Attention** : la matrice d'un endomorphisme symétrique dans une base $\mathcal{E}$ de E n'est pas toujours symétrique ! Elle l'est si $\mathcal{E}$ est une base orthonormée... D'autre part, si $\mathcal{E}$ est une base quelconque de E et $u \in \mathcal{L}(E)$, il se peut que $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E})$ soit symétrique sans que u soit symétrique !

Exemple. Soient $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Considérons l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ défini par $u(x) = \lambda_1 - \lambda_2$ où $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \in \mathbb{R}^2$. La matrice de u dans la base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ est alors $\mathrm{Mat}(u; (e_1, e_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Pourtant, u n'est pas un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique.

♦ **Exercice 19.** Soient $u \in \mathrm{Sym}(E)$ et F un sous-espace stable par u. Montrer que $F^\perp$ est stable par u.

♦ **Exercice 20.** Soient F, G des sous-espaces supplémentaires de E et p la projection sur F parallèlement à G. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $p \in \mathrm{Sym}(E)$;

(ii) $G = F^\perp$.

Le théorème suivant est tout à fait fondamental, d'où le nom qu'on va lui donner dans ce cours :

Théorème 1.7.1 (Théorème fondamental)**.** *Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E. Alors il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres pour u.*

♦ **Exercice 21.** * Démontrer ce théorème.

La version matricielle du théorème fondamental est la suivante (ce résultat est également crucial) :

Corollaire 1.7.1. *Si $A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une matrice orthogonale $\Omega \in O(n)$ telle que $\Omega^{-1} A \Omega = {}^t\Omega A \Omega$ soit diagonale. Autrement dit, une matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée.*

Définition 1.7.2. *On dit que $u \in \mathrm{Sym}(E)$ est* **positif** *(resp.* **défini positif***) si $\mathrm{Spec}(u) \subset \mathbb{R}_+$ (resp. $\mathrm{Spec}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$). On note $\mathrm{Sym}^+(E)$ (resp. $\mathrm{Sym}^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs (resp. symétriques définis positifs). On adopte une terminologie analogue pour les matrices, et on note $\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sym}_n^{++}(\mathbb{R})$ les ensembles correspondants.*

♦ **Exercice 22.** Soient F, G des sous-espaces supplémentaires de E. Alors tout élément x de E s'écrit $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On rappelle que la *symétrie* s par rapport à F parallèlement à G est définie par

$$\begin{array}{rccc} s : & E & \longrightarrow & E \\ & x = x_F + x_G & \longmapsto & x_F - x_G. \end{array}$$

1) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $s \in O(E)$;

(ii) $s \in \mathrm{Sym}(E)$.

(iii) $G = F^\perp$.

Si elles sont réalisées, on dit que s est la ***symétrie orthogonale*** par rapport à F, et on la note s_F.
Si $\dim E \geqslant 2$ et si F est un hyperplan de E, on dit que s_F est la ***réflexion*** d'hyperplan F.
2) Donner une expression simple de $s(x)$, pour $x \in E$, lorsque s est une réflexion.

Remarque. Les symétries orthogonales sont des endomorphismes à la fois symétriques et orthogonaux.

⚠ **Attention** : une symétrie (quelconque) n'est pas toujours un endomorphisme symétrique !

Exercice 9. Que dire d'une matrice $A \in \mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$ de trace nulle ?

Exercice 10. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
1) Établir : $\ker u^* = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$ et $\mathrm{Im}\, u^* = (\ker u)^\perp$.
2) Établir : $\mathrm{Im}\,(u \circ u^*) = \mathrm{Im}\, u$ et $\ker(u^* \circ u) = \ker u$.
3) Supposons $u^2 = 0$. Montrer que $u + u^*$ est inversible si et seulement si $\mathrm{Im}\, u = \ker u$.
4) Montrer que $u \circ u^*$ et $u^* \circ u$ sont symétriques positifs.

Exercice 11. ⋆ On dit qu'un endomorphisme u de E est ***normal*** s'il commute avec son adjoint, i.e., $u \circ u^* = u^* \circ u$. Soient u un endomorphisme normal de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que $F^\perp$ est stable par u^* et par u.

Exercice 12. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall\, x \in E, \quad \|u(x)\| \leqslant \|x\| .$$

1) Montrer : $\forall\, x \in E$, $\|u^*(x)\| \leqslant \|x\|$.
2) Prouver que $\ker(u - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Exercice 13. Soient $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice carrée d'ordre n définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est diagonalisable. A-t-on $A \in \mathrm{Sym}_n^{++}(\mathbb{R})$? $A \in \mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$?

Exercice 14. Soient $u \in \mathrm{Sym}^+(E)$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme $v \in \mathrm{Sym}^+(E)$ tel que $v^p = u$.

Exercice 15 (Décomposition polaire)**.** 1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme $v \in \mathrm{Sym}^+(E)$ tel que : $v^2 = u^* \circ u$.
2) Soit $u \in GL(E)$. Montrer qu'il existe un unique couple $(w, p) \in O(E) \times \mathrm{Sym}^+(E)$ tel que : $u = w \circ p$.

Exercice 16 (décomposition d'Iwasawa)**.** ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{T}_n^{>0}$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs.
1) Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\Omega \in O(n)$ et $T \in \mathcal{T}_n^{>0}$ tels que $P = \Omega T$.
Cette décomposition des matrices de $GL_n(\mathbb{R})$ en produit d'une matrice orthogonale par une matrice triangulaire supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs est appelée la *décomposition d'Iwasawa*.
2) En déduire que tout $A \in \mathrm{Sym}_n^{++}$ s'écrit ${}^tTT$ où $T \in \mathcal{T}_n^{>0}$.

Exercice 17. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \min(i,j)$. Montrer que $A \in \mathrm{Sym}_n^{++}(\mathbb{R})$.